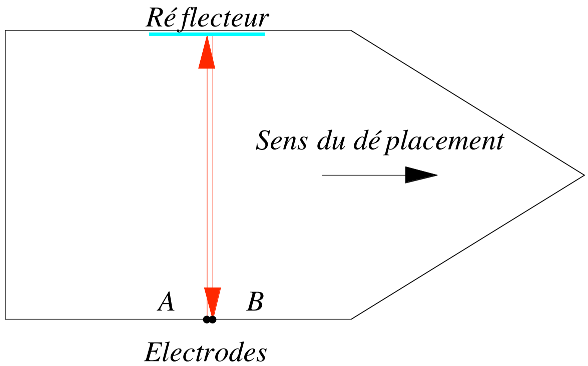
Nom : Groupe :

Champ de l'examen :	Relativité restreinte (20 points). Electromagnétisme (20 points). Total 40 points.
Date et lieu :	vendredi 28 mai 2004, 8h, CECNB, salle 61.
Durée :	240 minutes.
Documents autorisés :	Calculatrice, Formulaires et Tables CRM.

■ **Problème R1** (6 points)

Une étincelle éclate entre deux électrodes (événement A). Un éclair jaillit en direction d'un réflecteur situé à 1 mètre des électrodes. Il est réfléchi, revient en arrière et est enregistré (événement B) là où il a été produit. Tout ce dispositif se trouve dans un mobile qui se déplace à la vitesse $\beta = 0.5$ selon l'axe Ox du laboratoire. Le passage du mobile se produit de telle sorte que l'étincelle jaillit au temps $t = 0$ et à l'origine des coordonnées x, y dans le système du laboratoire.



1. Donnez les coordonnées de l'événements A :
a) dans le système du mobile (0.5 point)
b) dans le système du laboratoire (0.5 point)
2. Donnez la durée (en m) séparant l'événement A de l'événement B :
a) dans le système du mobile (1 point)
b) dans le système du laboratoire (1 point)
Cette durée entre les deux événements est-elle la même dans les deux référentiels ? Explications (2 points)
3. Une balle est tirée à la vitesse $\beta' = 0.75$ par rapport au mobile dans la direction Ox et dans le sens du déplacement. Calculez la vitesse β de la balle par rapport au laboratoire (1 point)

■ **Problème R2** (6 points)

Le passage d'un système de référence Σ à un autre Σ' en translation uniforme selon Ox est donné par la transformation de Lorentz suivante :

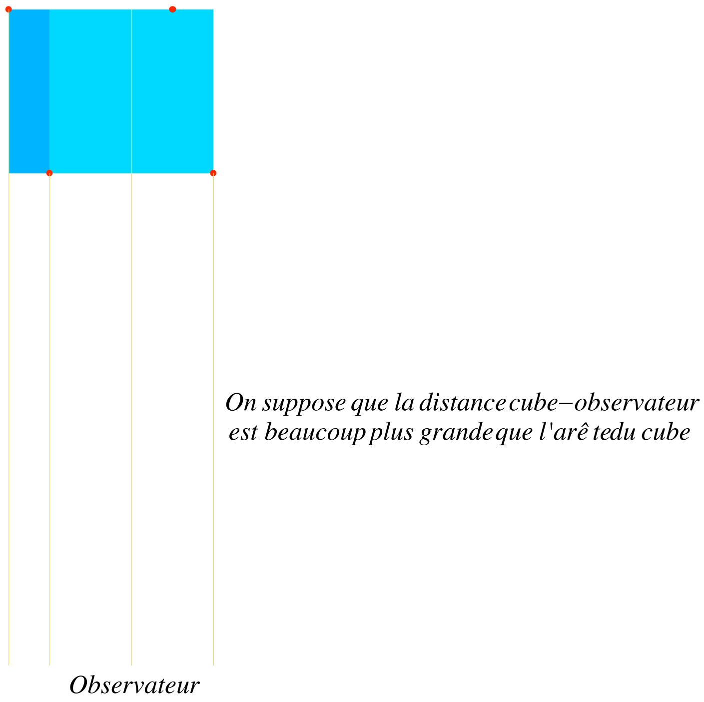
$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

1. Que vaut la vitesse relative de translation β d'un système par rapport à l'autre ? (1 point)
2. Dessinez les deux systèmes de référence au moment où les origines coïncident si θ vaut $\frac{\pi}{6}$ (2 points)
3. Une règle de 1 m, placée sur l'axe Ox de Σ, est observée depuis Σ'. Quelle longueur l'observateur de Σ' lui attribue-t-il ? Quelle longueur un observateur de Σ attribuerait-il à une règle de 1 m placée sur l'axe Ox' de Σ' ? Justifiez vos réponses à l'aide d'un diagramme d'espace-temps. (3 points)

⚠ voir page suivante

■ **Problème R3** (8 points)

Vous observez un cube d'arête unité en translation uniforme de gauche à droite à la vitesse β. Les sommets du cube émettent de la lumière. Vue de dessus, la situation se présente ainsi :



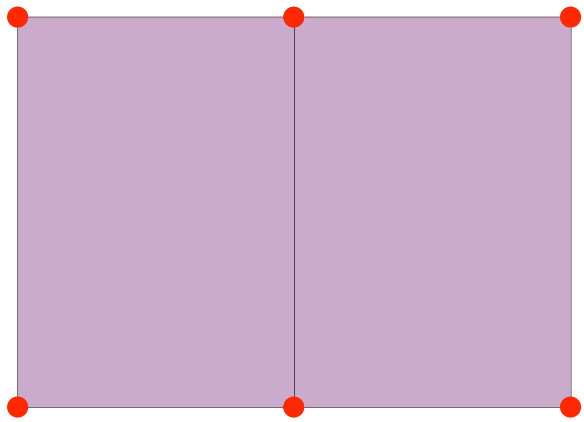
Lorsque le cube se trouve en face de vous, vous recevez simultanément la lumière émise par les sommets les plus éloignés et celle émise par les sommets les plus proches de vous. La lumière émise par les sommets les plus éloignés a donc été émise avant celle qui vous parvient des sommets les plus rapprochés.

a) Combien de temps s'est-il écoulé dans le système de l'observateur entre ces deux émissions ? (2 points)

b) Quel a été le déplacement du cube durant ce temps ? (2 points)

c) Que vaut la longueur de l'arête reliant les deux sommets les plus rapprochés de l'observateur dans son système de référence ? (2 points)

d) Que vaut la vitesse de translation β du cube si vous le voyez ainsi (2 points) :



voir page suivante

■ **Problème E1** (4 points)

Deux charges ponctuelles de 4 et de 6 μC sont situées à quelque distance l'une de l'autre. Elles exercent l'une sur l'autre des forces de 0.4 N.
a) Calculez le champ électrique produit par la première à l'endroit où se trouve la seconde. (2 points)
b) Calculez le champ électrique produit par la seconde à l'endroit où se trouve la première. (2 points)

■ **Problème E2** (4 points)

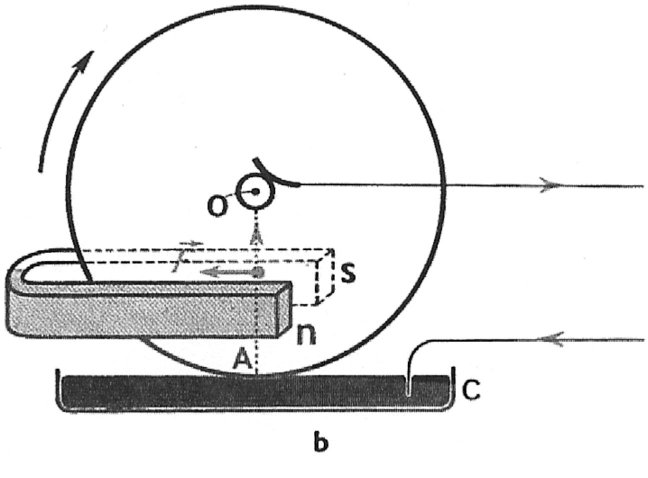
Une centrale hydroélectrique fournit de l'énergie à une ville. La tension à la sortie de la centrale vaut U et la tension à l'entrée de la ville vaut U'. La ligne a une résistance R et elle transporte un courant d'intensité I.
a) Etablissez l'expression donnant le rendement de la ligne. (2 points)
b) Montrez que pour une puissance consommée par la ville donnée et égale à $U'I$, le rendement de la ligne sera d'autant meilleur que la tension U' sera plus élevée. (2 points)

■ **Problème E3** (4 points)

Un accélérateur de particules, du type Van de Graff, produit des protons et des positons (anti-électrons) de 5 [MeV]. Déterminez la vitesse de ces particules en m/s.

■ **Problème E4** (4 points)

Le rayon AO d'une roue de Barlow vaut 10 cm. Il est supposé situé tout entier dans un champ magnétique uniforme, normal à ce rayon, et d'induction $B = 0.02$ T. Sachant que la roue fait 90 tours par minute et que la puissance développée par la force électromagnétique $\vec{F}$ qui fait tourner la roue vaut 2.4×10^{-3} W, calculez :
a) l'intensité du courant qui alimente la roue; (2 points)
b) la grandeur de la force électromagnétique $\vec{F}$ appliquée au rayon AO. (2 points)



■ **Problème E5** (4 points)

Un solénoïde de 1 m de longueur est formé par une seule couche de spires jointives de 5 cm de rayon faites d'un fil conducteur de 1 mm de diamètre.
a) Donnez l'expression de la tension induite dans le solénoïde lorsqu'il est parcouru par un courant dont l'intensité en fonction du temps varie comme $i(t) = 25\ t^2$ (2 points)
b) Calculez la valeur de cette tension 1 seconde après l'instant initial $t = 0$ s. (2 points)

Corrigé

1. Lorsque l'événement A se produit, les origines des deux systèmes de référence coïncident.
Les coordonnées de l'événement A valent $\{0, 0\}$ dans les deux systèmes. (1 point)
2. La durée $\Delta t'$ séparant l'événement A de l'événement B vaut :
a) 2 mètres de temps dans le système lié au mobile (1 point)
b) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ mètres de temps dans le système du laboratoire (1 point)
Pour trouver la durée dans le système du laboratoire, on utilise la transformation de Lorentz :

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x'\\ \Delta t'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} & \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\\ \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\\ \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\end{pmatrix}$$

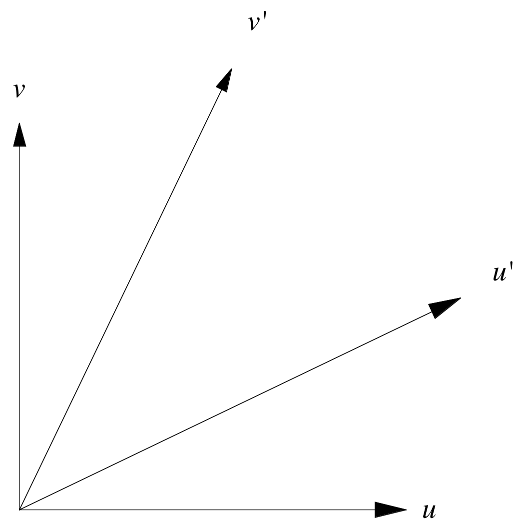
La durée séparant les deux événements est plus grande dans le système lié au laboratoire, car, quel que soit le référentiel inertiel, la vitesse de la lumière est la même, et, pour un observateur se trouvant dans le laboratoire, la lumière franchit une plus grande distance. (2 points)
3. La vitesse de la balle par rapport au laboratoire vaut :

$$\beta = \frac{\beta' + \beta_r}{1 + \beta' \beta_r} = \frac{0.75 + 0.5}{1 + 0.75 \times 0.5} \simeq 0.91 \quad \text{(1 point)}$$

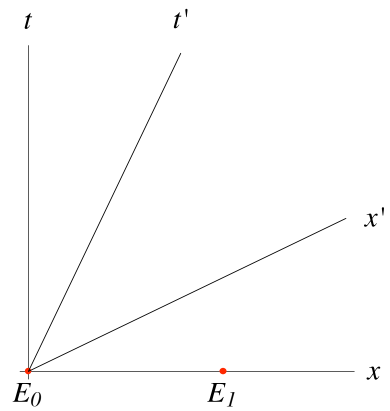
Problème R2 (6 points)
1. La vitesse relative des systèmes $\beta = \frac{v}{c}$ est égale à la tangente hyperbolique de θ :

$$\beta = \text{th}\theta \quad \text{(1 point)}$$

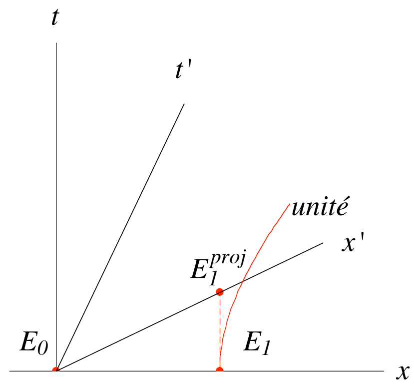
2. En appliquant la transformation de Lorentz aux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de chaque axe, on obtient les vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ permettant de dessiner le système de référence Σ' (2 points)



3. Représentons les deux extrémités E_0 et E_1 d'une règle de 1m placée sur Ox dans Σ : (3 points)



Pour observer la règle dans Σ' « projetons » E_1 sur Ox' sans changer la longueur de la règle dans Σ. Nous obtenons E_1^{proj}. Dessinons la branche d'hyperbole donnant l'unité sur chaque axe :



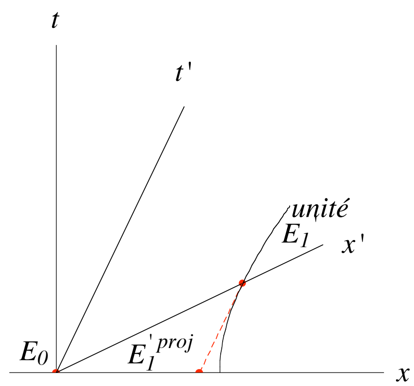
La distance $E_0 E_1^{\text{proj}}$ est inférieure à l'unité dans Σ'. La règle paraît donc contractée lorsqu'elle est observée depuis Σ' et sa longueur dans ce système vaut :

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} = 0.877 \text{ m}$$

```
1 * Sqrt[1 - Tanh[Pi / 6] ^ 2] // N
```

```
0.87701
```

Représentons les deux extrémités E_0 et E_1' d'une règle de 1m placée sur Ox' dans Σ'. Lorsque nous projetons E_1' sur Ox sans changer la longueur de la règle dans Σ', nous obtenons $E_1^{'\text{proj}}$:



La distance $E_0 E_1^{'\text{proj}}$ est aussi inférieure à l'unité dans Σ. La règle paraît donc aussi contractée lorsqu'elle est observée depuis Σ et sa longueur dans ce système vaut aussi :

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} = 0.877 \text{ m}$$

Problème R3 (8 points)
a) Les deux sommets sont séparés par une distance de 1 m dans les deux systèmes de référence (l'arête est perpendiculaire au déplacement donc sa longueur reste la même dans les deux systèmes). La lumière parcourt donc cette distance en 1 m de temps.
b) Le cube s'est déplacé d'une distance $d = \beta \Delta t$ dans le laboratoire, soit $d = \beta$ (2 points)
c) L'arête paraît contractée à l'observateur et sa longueur dans le laboratoire vaut $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ (2 points)
d) Le rapport de la longueur l_0 de l'arête non contractée (celle qui est perpendiculaire au déplacement) à la longueur l de l'arête contractée permet d'obtenir $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2} \simeq 0.7$ (2 points)

Problème E1 (4 points)
Les deux charges subissent la même force, mais n'ont pas la même charge. La relation $E = \frac{F}{q}$ permet de calculer le champ à l'endroit où se trouve la charge q qui subit la force F. Ce champ est produit par l'autre charge. Désignons par E_1 le champ produit par la charge q_1 et par E_2 celui produit par q_2. On obtient :

a) $E_1 = \frac{F}{q_2} = \frac{2}{3} \times 10^5 \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ (2 points)

b) $E_2 = \frac{F}{q_1} = 10^5 \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$ (2 points)

```
F / q2 /. {F → 4 / 10, q2 → 6 * 10^-6}
F / q1 /. {F → 4 / 10, q1 → 4 * 10^-6}
```

$\frac{200000}{3}$

100000

Problème E2 (4 points)
a) La puissance fournie par la centrale est égale à celle qui est reçue par la ville plus celle qui est transformée en chaleur dans la ligne : $UI = U'I + RI^2$. Le rendement de la ligne est donc égal à :

$$\eta = \frac{U'I}{UI} = \frac{U'I}{U'I + RI^2} = \frac{U'}{U' + RI} \text{ (2 points)}$$

b) Pour obtenir un bon rendement, il faut d'une part que la résistance R de la ligne soit la plus faible possible et d'autre part que le courant I soit petit. Comme la puissance consommée par la ville est fixée d'avance, le produit $U'I$ est donné. Si on veut que le courant I soit petit, il faut que la tension U' soit élevée. (2 points)

Problème E3 (4 points)
Si on utilise la relation classique $qU = \Delta E_{cin} = \frac{mv^2}{2}$, on obtient les résultats suivants :
$v_{protons} \simeq 3.09 * 10^7$ m/s (calcul classique)
$v_{positons} \simeq 13.25 * 10^8$ m/s (vitesse supérieure à elle de la lumière dans le vide !)
En faisant un calcul relativiste, on obtient :
$v_{protons} \simeq 3.08 * 10^7$ m/s (2 points)
$v_{positons} \simeq 2.99 * 10^8$ m/s (2 points)

```
Sqrt[2 e * U / m] /. {e → 1.6 * 10^-19, U → 5 * 10^6, m -> 1.672 * 10^-27}
Sqrt[2 e * U / m] /. {e → 1.6 * 10^-19, U → 5 * 10^6, m -> 0.911 * 10^-30}
```

3.09344×10^7

1.32526×10^9

Le première vitesse obtenue est négligeable en regard de la vitesse de la lumière mais le deuxième résultat fournit une vitesse supérieure à celle de la lumière dans le vide (!) Il faut donc utiliser l'expression relativiste de l'énergie :

$$W = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

pour exprimer l'énergie cinétique $E_{cin} = W - mc^2$:

$$qU = \Delta E_{cin} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

Résolvons cette équation par rapport à v et calculons ces vitesses en [m/s] pour le proton et le positon :

```
sol = Solve[m * c^2 (1 / Sqrt[1 - (v / c) ^2] - 1) == q * U, v]
```

$$\left\{\left\{v \to -\frac{c\sqrt{q}\,\sqrt{U}\,\sqrt{2-\frac{q\,U}{c^2\,m+q\,U}}}{\sqrt{c^2\,m+q\,U}}\right\}, \left\{v \to \frac{c\sqrt{q}\,\sqrt{U}\,\sqrt{2-\frac{q\,U}{c^2\,m+q\,U}}}{\sqrt{c^2\,m+q\,U}}\right\}\right\}$$

```
sol[[2, 1, 2]] /. {m -> 1.672 * 10^-27, q -> 1.6 * 10^-19, U → 5 * 10^6, c → 3 * 10^8}
sol[[2, 1, 2]] /. {m -> 0.911 * 10^-30, q -> 1.6 * 10^-19, U → 5 * 10^6, c → 3 * 10^8}
```

3.08117×10^7

2.98701×10^8

Problème E4 (4 points)

La vitesse angulaire ω de la roue est constante et la grandeur de la vitesse linéaire v d'un point situé sur le rayon aussi. Nous pouvons exprimer la puissance $\mathcal{P}$ dissipée par la force électromagnétique F en considérant que cette force agit sur le milieu du rayon r de la roue : $\mathcal{P} = Fv = IrB\frac{\omega r}{2}$. Cette expression permet d'obtenir l'intensité I du courant et la grandeur F de la force électromagnétique appliquée au rayon.

$$I = \frac{2\mathcal{P}}{r^2 B\omega} \simeq 2.55 \text{ A (2 points)}$$

$$F = \frac{2\mathcal{P}}{\omega r} \simeq 5.09 \times 10^{-3} \text{ N (2 points)}$$

```
2 p / (r^2 * B * ω) /. {r → 0.1, B → 0.02, ω → 90 * 2 Pi / 60, p → 2.4 * 10^-3}
2 p / (ω * r) /. {r → 0.1, ω → 90 * 2 Pi / 60, p → 2.4 * 10^-3}
```

2.54648

0.00509296

Problème E5 (4 points)

La tension induite par la variation du courant $i(t) = 5t^2$ est donnée par :

$$U_{\text{induite}} = -L\frac{di}{dt} = -50\,Lt \text{ (2 points)}$$

L est le coefficient d'auto induction de la bobine qui est égal à $\frac{\mu_0\, n^2\, S}{l}$ où n est le nombre de spires, S l'aire limitée par une spire et l la longueur de la bobine. Le nombre n de spires s'obtient à partir du diamètre du fil et de la longueur de la bobine $n = \frac{l_{\text{bobine}}}{\phi_{\text{fil}}} = 1000$.

$$U_{\text{induite}} = -\frac{\mu_0\, n^2\, S}{l}\frac{di}{dt} \simeq -0.49 \text{ V (2 points)}$$

```
i[t_] := 25 t^2
-L * i'[t]
mu0 * n^2 * Pi * r^2 / l * i'[t] /. {l → 1, r → 0.05, mu0 → 4 Pi * 10^-7, n → 1000, t → 1}
```

-50 L t

0.49348

■ Barème

```
TableForm[Table[{i, 4.5 / 40 * i + 1.5}, {i, 10, 40}]]
```

10	2.625
11	2.7375
12	2.85
13	2.9625
14	3.075
15	3.1875
16	3.3
17	3.4125
18	3.525
19	3.6375
20	3.75
21	3.8625
22	3.975
23	4.0875
24	4.2
25	4.3125
26	4.425
27	4.5375
28	4.65
29	4.7625
30	4.875
31	4.9875
32	5.1
33	5.2125
34	5.325
35	5.4375
36	5.55
37	5.6625
38	5.775
39	5.8875
40	6.